

Capítulo 1

Introdução à Análise de Longo Prazo

O estudo dos fenómenos económicos é normalmente efectuado com base na construção de dois tipos de modelos: modelos com uma natureza *estática* e modelos *dinâmicos*. Os objectivos fundamentais serão, em última instância, os mesmos em ambos os tipos de modelos, mas os instrumentos necessários para dar resposta às questões de teoria e política económica são substancialmente diferentes.

Por exemplo, numa disciplina de macroeconomia (de nível intermédio, e.g., de uma licenciatura) o estudo dos ciclos económicos de curto prazo é feito, na maioria dos casos, com base na *análise estática*. A essência deste tipo de análise consiste na explicação do funcionamento macroeconómico de curto prazo com base em *variáveis endógenas* todas elas expressas relativamente ao mesmo período de tempo (ano, semestre, etc.). De facto, poderão existir no modelo variáveis expressas relativamente a períodos anteriores ou posteriores — por exemplo, as expectativas sobre preços, sobre o rendimento ou sobre a taxa de câmbio, etc. — no entanto, estas são necessariamente mantidas como variáveis exógenas. Assim, é possível determinar o equilíbrio num mercado, ou mesmo o equilíbrio macroeconómico, bem como o valor de todas as variáveis endógenas, com base única e simplesmente no valor dos parâmetros e das variáveis exógenas.

Assim, dentro da análise estática, um equilíbrio num dado período pode ser alterado se e só se existir uma alteração numa dessas forças exógenas. Este tipo de análise económica é normalmente designada por *estática comparativa*, pois as alterações que se processarem entre um equilíbrio num dado período e o equilíbrio num período subsequente em nada dependem da dinâmica interna do modelo (ou seja, não dependem das variáveis endógenas). Portanto, na análise estática teremos

alterações nas variáveis exógenas entre t e $t + 1$

↓

valor das variáveis endógenas altera-se entre t e $t + 1$

Contrariamente àquele tipo de processos, a *análise dinâmica* em macroeconomia pretende explicar o comportamento dos principais agregados económicos mas num período temporal de *longo prazo*. Em termos de objectivos e metodologia, a análise dinâmica macroeconómica não é muito diferente da análise estática, pois continua a preocupar-se com o problema da existência ou não de equilíbrio, continua a levar em consideração o impacto de forças exógenas sobre o equilíbrio do modelo, continua a pretender explicar de que forma as instituições públicas poderão intervir no funcionamento da economia para melhorar o bem-estar social, etc.. Tem no entanto uma diferença crucial: nos processos dinâmicos, as variáveis endógenas têm uma dinâmica própria, o que faz com que a sua evolução ao longo do tempo dependa também delas próprias e não apenas de alterações nas variáveis exógenas como era o caso dos processos estáticos. Ou seja, *um sistema dinâmico pode apresentar uma evolução ao longo do tempo mesmo que nenhuma força exógena sofra qualquer alteração*.

Como surge esta dinâmica interna nos processos dinâmicos? Surge devido ao facto das variáveis endógenas serem expressas em termos de diferentes períodos temporais. Por exemplo, considere o caso de um empréstimo bancário. O valor da dívida ao banco no período $t + 1$, que iremos designar por x_{t+1} , depende do montante em dívida no período t , x_t , da taxa de juro neste período (r_t) bem como da amortização do capital emprestado que seja feita neste período (a parcela do capital que é liquidada, $\delta \cdot x_t$).¹ Mesmo que a taxa de juro permaneça constante ao longo dos anos, o valor da dívida vai evoluindo dependendo única e exclusivamente de uma dinâmica interna que resulta fundamentalmente do valor amortizado em cada período de tempo.

Como é facilmente perceptível, a evolução da dívida ao banco é um processo dinâmico, a compreensão do qual requer técnicas de análise bem diferentes das técnicas usadas na análise estática. Portanto, na análise dinâmica teremos

mesmo sem alterações nas variáveis exógenas entre t e $t + 1$

↓

valor das variáveis endógenas altera-se entre t e $t + 1$

¹Como é óbvio, δ é a taxa de amortização do empréstimo, e é uma constante entre 0 e 1.

Esta diferença pode parecer à primeira vista pouco significativa, no entanto isto não é correcto, pois produz alterações bastante relevantes na análise do funcionamento dinâmico da economia. Existem três tipos de questões que normalmente parecem ser mal interpretadas por quem inicia o estudo de análise dinâmica em economia. Primeiro, surge o problema de definir o equilíbrio num processo dinâmico. Como se determina este equilíbrio, ou seja, como se determina o equilíbrio no longo prazo de um processo que evolui ao longo do tempo? Segundo, é frequente confundir-se a evolução temporal de uma variável enquanto esta se encontra no trajecto de convergência para o seu equilíbrio de longo prazo, com a sua evolução no próprio equilíbrio. Terceiro, o que acontece a este equilíbrio se uma força exógena for alterada de forma temporária ou de forma permanente? Para clarificar estes pontos vamos de seguida apresentar um exemplo tendo por base a evolução da dívida pública.

1.1 Curto Prazo vs Longo Prazo

Na *Figura 1.1* apresentamos um exemplo gráfico que nos permite ilustrar de forma bastante simples as principais diferenças entre a análise de curto prazo e a análise de longo prazo. Suponha que a dívida pública em percentagem do PIB no período t é designada por z_t , e pretende-se saber de que forma esta variável reage (em termos de curto prazo e de longo prazo) a um choque de política económica causado pelo aumento do nível das despesas públicas.

O nosso exemplo socorre-se da equação dinâmica para o comportamento da dívida pública em percentagem do PIB dada por (a qual irá ser explicada em grande detalhe no último capítulo)²

$$z_t = \psi + \tau \cdot z_{t-1} \quad , \quad t = 0, 1, 2, \dots \quad (1.1)$$

onde ψ é o défice público primário em percentagem do PIB, e τ é um rácio definido da seguinte forma: $\tau = \frac{1+r}{1+g}$, sendo g a taxa de crescimento económico e r a taxa de juro real.³ Utilizamos os seguintes valores para os parâmetros: uma taxa de crescimento do PIB de 3.5% (ou seja, $g = 3.5\%$), uma taxa de juro real com o valor de 3% ($r = 3\%$), e dois cenários para

²Por agora, não se preocupe como esta equação é obtida. Uma equação deste tipo, em que z_{t+1} é uma função de z_t , é designada por "equação às diferenças" e, por enquanto, "acredite" que a evolução da dívida pública em percentagem do PIB pode ser descrita pela equação acima apresentada. O objectivo nesta secção é apenas mostrar as diferenças entre a análise de curto prazo e de longo prazo em termos macroeconómicos.

³A diferença entre o défice público primário e o défice público efectivo tem a ver com os juros da dívida pública. O primeiro défice não engloba estes juros, enquanto que o segundo já os considera.

o défice público primário em percentagem do PIB, no caso A de 1% e no B de 2% ($\psi_A = 0.01$, $\psi_B = 0.02$).

Suponha ainda que a condição de partida é de $z_0 = 0.025$. Sendo $z_0 = 0.025$, e como $\tau = \frac{1+0.03}{1+0.035} \simeq 0.995$ é simples calcular o valor de z_t para o $t = 1$, para $t = 2$ e para $t = 3$ e assim por diante. Para o cenário A teremos:

$$\begin{aligned} z_1 &= 0.01 + 0.995 \times 0.025 = 0.034875 \\ z_2 &= 0.01 + 0.995 \times 0.034875 = 0.0447 \\ z_3 &= 0.01 + 0.995 \times 0.0447 = 0.05447 \end{aligned}$$

Aplicando o mesmo raciocínio para o cenário B obteremos: $z_1 = 0.044875$, $z_2 = 0.06465$, $z_3 = 0.084327$. No painel 1 da *Figura 1.1* apresentamos as primeiras 30 iterações destes dois cenários, nas abcissas encontra-se o tempo e nas ordenadas o valor de z_t . Olhando para este painel, ficamos com a noção de que a dívida pública deverá tornar-se insustentável ao fim de um certo período de tempo porque, aparentemente, a mesma e em percentagem do PIB parece crescer sem parar, tendendo para infinito no longo prazo. No entanto, esta perspectiva de curto prazo é tremendamente ilusória e errada como iremos mostrar.

Se pretendêssemos estudar a sustentabilidade dívida publica olhando apenas para aquilo que acontece em 5 ou 10 anos, seremos levados a uma conclusão totalmente errada conforme painel 1. O que acontece se dilatarmos o período temporal em que processo decorre? No painel 2 da referida figura apresentamos agora a evolução da dívida pública num horizonte temporal onde a sua sustentabilidade pode ser de facto correctamente avaliada. Como se pode constatar neste painel, z_t cresce ao longo do tempo até alcançar valores próximos de 2 (ou seja, 200%) no cenário B e de 1(ou 100%) no cenário A, permanecendo nesses valores daí em diante. Ou seja, quando consideramos um período temporal relativamente longo, nos cenários que estamos aqui a apresentar a dívida pública em percentagem do PIB converge para um valor de equilíbrio em cada um dos cenários. Começa a aparecer aqui a noção do que é um "equilíbrio de longo prazo" num processo dinâmico: caso exista, este equilíbrio é um valor para o qual a variável endógena converge no longo prazo, e quando este for alcançado, a variável deixa de crescer ou decrescer daí em diante.⁴

Um outro aspecto que fica claro com a *Figura 1.1* é a diferença existente entre o equilíbrio de longo prazo e o processo dinâmico até se atingir esse equilíbrio. Este último processo é normalmente designado por "processo de transição dinâmica" e ocorre em duas situações possíveis:

⁴O termo inglês normalmente utilizado na literatura económica para designar este equilíbrio de longo prazo é o de "steady state" ou "fixed point".

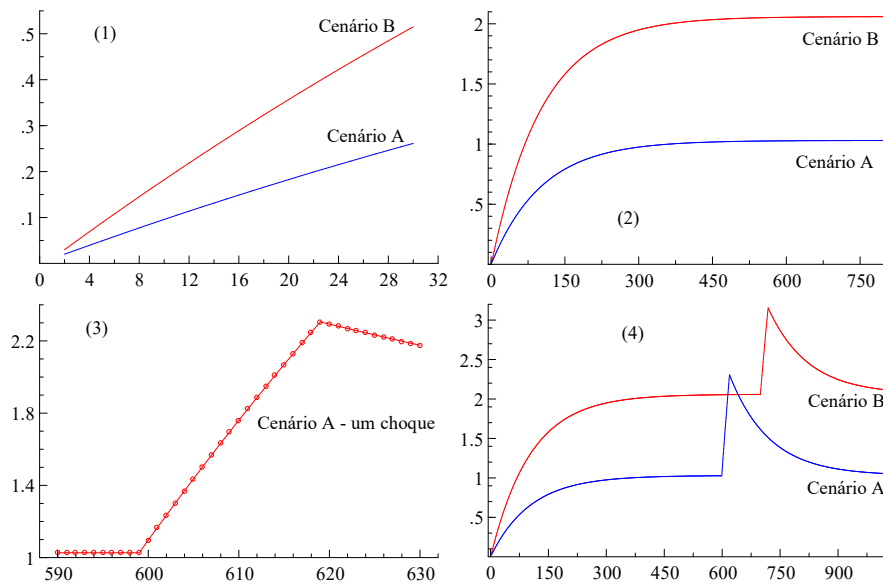


Figura 1.1: CURTO PRAZO VERSUS LONGO PRAZO EM PROCESSO DINÂMICO. Nos vários painéis temos o tempo representado no eixo das abcissas e o valor da dívida pública em percentagem do PIB (d_t) no eixo das ordenadas. No painel 1 temos um processo de transição dinâmica; no painel 2 mostra-se o processo de transição convergindo para o equilíbrio de longo prazo. No painel 3 mostra-se o choque sobre a dívida pública durante 20 períodos, enquanto que no último painel é apresentado o subsequente processo de transição novamente até ao equilíbrio de longo prazo.

(i) entre a condição inicial ou de partida do processo e o seu equilíbrio de longo prazo; ou (ii) entre dois equilíbrios de longo prazo, quando um é perturbado por alguma alteração numa variável exógena. Os painéis 3 e 4 da figura servem para clarificar melhor este segundo caso.

Suponha que no cenário A, por volta de $t = 600$, o governo se vê forçado a aumentar o déficit público primário ao longo de duas décadas, baixando-o depois novamente para o nível inicial de 1%. O que acontece ao equilíbrio de longo prazo em que a dívida pública se encontrava antes deste choque surtir efeitos? Qual será o novo equilíbrio de longo prazo quando o choque se extinguir? Como se pode ver no painel 3 da *Figura 1.1*, enquanto o governo vai aumentando o déficit primário ($\psi \uparrow$), a dívida pública em percentagem do PIB, (z_t), vai também aumentando chegando mesmo a ultrapassar o valor de 2.2 (ou seja, 220% do PIB). No entanto, quando ψ volta ao valor inicial, z_t inicia um processo de transição para um novo equilíbrio, o qual acaba por ser igual ao equilíbrio inicial conforme se pode verificar painel 4.

Neste último painel podemos também ver claramente a existência de dois processos de transição dinâmica. O primeiro é aquele que ocorre entre o ponto de partida e o período em que a variável z_t atinge o seu equilíbrio de longo prazo em cada um dos cenários (o que acontece aproximadamente com $t = 400$ e $t = 450$ nos cenários A e B, respectivamente). O outro processo de transição verifica-se quando o choque externo imposto sobre cada um dos cenários termina (o que acontece após o "pico" ou subida abrupta das séries) e a dívida pública em percentagem do PIB começa a convergir de forma gradual novamente para cada um dos equilíbrios de longo prazo.

Conclusão 1.1 *A dívida pública em percentagem do PIB é um processo cuja sustentabilidade só pode ser devidamente analisada levando em consideração a sua evolução ao longo de várias décadas, ou mesmo séculos, e não apenas ao longo de meia dúzia de anos ou de duas ou três décadas.*

Conclusão 1.2 *Num processo dinâmico convém ter atenção para não confundir a evolução subjacente a um mero processo de transição dinâmica com a evolução da variável num equilíbrio de longo prazo. Como se pode facilmente constatar na Figura 1.1, isto pode levar a conclusões totalmente erradas sobre a evolução de um processo dinâmico no longo prazo.*

1.2 A Importância da Análise Dinâmica

Na secção anterior utilizámos a análise da evolução da dívida pública com vista a explicitar as diferenças existentes entre a análise estática

e a análise dinâmica. Vimos que a sustentabilidade da dívida pública só pode ser devidamente analisada numa perspectiva temporal de longo prazo. Este tipo de problema (questões relacionadas com a sustentabilidade de um processo dinâmico) pode ser facilmente estendido a outros domínios da economia como sejam, por exemplo, o sistema de segurança social e a gestão dos recursos naturais. Um outro tema que também só pode ser devidamente estudado através do recurso à análise de longo prazo é o *crescimento económico* dos diferentes países bem como a existência/inexistência de *convergência* entre os mesmos no que diz respeito às condições médias de vida.

1.2.1 A convergência económica

Historicamente, é possível detectar a existência ao longo de vastos períodos de tempo de países com ritmos de crescimento bem diferenciados uns dos outros. Estas discrepâncias nos ritmos de crescimento reflectem-se em grandes desigualdades entre os vários países quanto ao seu nível de rendimento per capita, existindo países ricos, países pobres e outros muito pobres.

No sentido de mostrar a importância vital que um pequeno diferencial nas taxas de crescimento económico entre vários países tem no processo de divergência/convergência entre os padrões médios de vida destes países, podemos fazer um pequeno exercício. Suponha três economias: o rendimento per capita da economia A cresce a uma taxa média de 2% ao ano, o da economia B cresce a 4% ao ano, enquanto que a economia C cresce a 6% ao ano. Suponha ainda que as condições de partida das três economias são as mesmas: o nível de rendimento per capita é de 20 para cada uma.

Assumindo que o tempo decorre de forma discreta (isto é, se $t = 0, 1, 2, 3, \dots$), a evolução do rendimento per capita de cada uma das economias pode ser descrito pela seguinte equação

$$y_t = y_0(1 + g)^t \quad (1.2)$$

sendo y_0 o rendimento per capita no período inicial, y_t o rendimento per capita no período t , e g a taxa média de crescimento económico por período (cada período pode ser um ano, um semestre, um mês, etc., embora nas análises de crescimento económico esta seja normalmente associada aos anos).

Na *Figura 1.2* encontra-se representada a evolução do nível do rendimento per capita das três economias durante um período de 60 anos. Como se pode facilmente constatar os níveis de rendimento vão divergindo ao longo do tempo. O rendimento de A passa de 20 no período zero ($t = 0$)

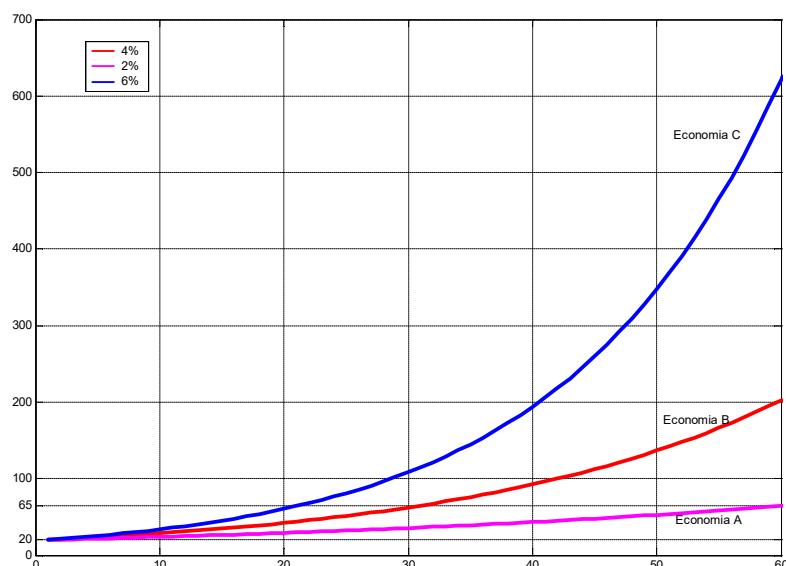


Figura 1.2: A DIVERGÊNCIA ECONÓMICA NO LONGO PRAZO: *pequenas diferenciais nas taxas de crescimento económico levam a enormes diferenças nos níveis do rendimento per capita no longo prazo.*

para cerca de 65 em $t = 60$; no caso da economia B, este passa de 20 para cerca de 210, enquanto que atinge o valor 659 para a economia C. Ou seja um diferencial de 4% nas taxas médias de crescimento entre as economias A e C, leva a que esta última apresente ao fim de sessenta anos um nível do rendimento per capita dez (!) vezes superior ao da economia A. Estas diferenças produzidas num período de tempo não muito dilatado, pelo menos no que diz respeito a uma análise de longo prazo, são de facto notáveis e permitem explicar as razões que estão por detrás da existência de países ricos e outros muito pobres.

Se a análise fosse em tempo contínuo (se o tempo não pudesse ser partido em unidades, ou seja, se for tratado como uma variável contínua), o valor assumido pelo rendimento per capita no momento t pode ser expresso pela seguinte equação

$$y_t = y_0 \cdot e^{g \cdot t} \quad (1.3)$$

onde a única diferença, relativamente ao caso anterior, reside na presença do símbolo "e" o qual representa o chamado "número natural" e é dado pelo valor $e = 2.71828$. Sabendo que o valor inicial é de $y_0 = 20$ para

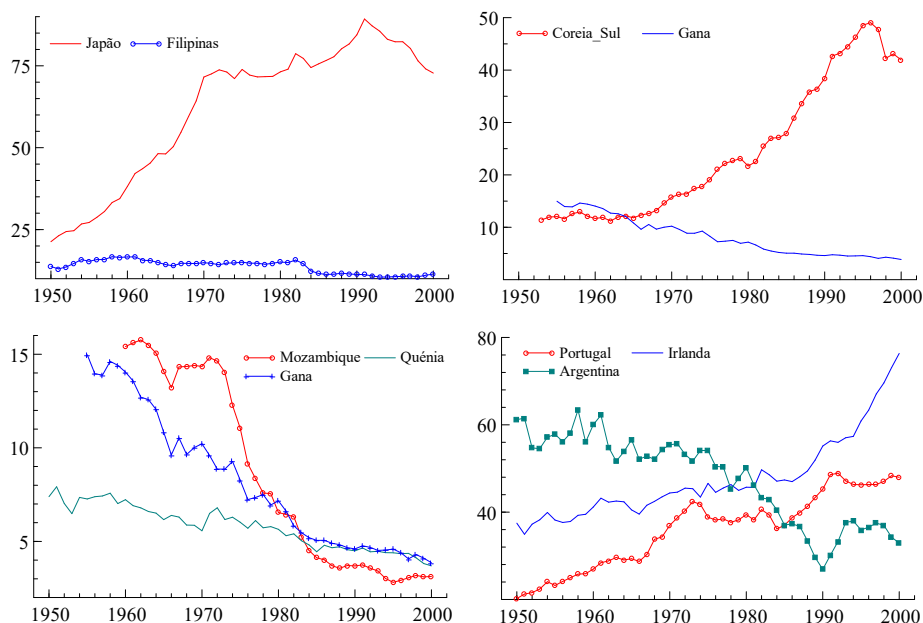


Figura 1.3: CONVERGÊNCIA E DIVERGÊNCIA ECONÓMICA: o PIB per capita de vários países em percentagem do nível dos Estados Unidos, para o período 1950–2000.

as três economias, utilizando qualquer máquina de calcular relativamente simples, podemos fazer as contas e obter os seguintes resultados: ao fim de sessenta anos a economia A passa para um rendimento per capita de 66, a B para 220 e a C para 731.9. Como podemos verificar os resultados são aproximados aos do caso discreto, embora não exactamente iguais devido ao facto do tempo decorrer de forma ligeiramente diferente nos dois casos.

O exemplo acima apresentado é apenas um exercício meramente matemático. No entanto, como vamos mostrar é fácil encontrar situações deste tipo na realidade em que vivemos, ou que temos vivido ao longo dos últimos cem anos. De facto não é difícil encontrar situações de grande divergência e/ou convergência entre os níveis de vida de diferentes economias ao longo das últimas décadas. Para dar resposta a estas questões apresentamos a *Figura 1.3*.

Na *Figura 1.3* temos representados os ritmos de crescimento do rendimento per capita de economias dos vários continentes, incluindo países asiáticos, europeus, africanos e da América Latina, para o período entre 1950 e 2000. O nível do rendimento per capita dos EUA é colocado no

valor 100, e a evolução das restantes economias é confrontada com este valor. Convergência económica implica que a série de cada país deve ter uma tendência ou inclinação positiva, divergência implica uma série com inclinação negativa.

Como podemos observar no primeiro painel, no início dos anos 50 o nível de rendimento per capita do Japão e das Filipinas (dois países asiáticos) não eram muito diferentes (21 do Japão, 13 das Filipinas em relação aos 100 dos EUA). No entanto, esta diferença agravou-se de forma notável ao longo dos últimos cinquenta anos, e mais, enquanto que o primeiro país convergiu para o nível do rendimento per capita dos EUA, as Filipinas divergiram relativamente ao mesmo. Uma situação semelhante passou-se com a Coreia do Sul e o Gana, sendo interessante que na década de 50, a população do Gana apresentava melhores condições médias de vida que na Coreia. No terceiro painel, podemos observar um facto que é comum a praticamente todos os países africanos, o qual consiste na divergência económica que têm evidenciado ao longo dos últimos cinquenta anos, relativamente aos EUA e restantes países desenvolvidos. Neste caso específico, os países aqui apresentados apresentam um nível de rendimento per capita em percentagem do dos EUA que tem diminuído de forma constante, situando-se hoje num valor inferior a 5% para todos eles.

Finalmente, no painel do canto inferior direito apresentamos os processos de convergência de dois países europeus (Portugal e Irlanda) e de um caso bastante interessante da América Latina (Argentina). No início da década de 50, a Argentina era um dos países com maiores níveis de rendimento per capita em todo o mundo, situando-se em cerca de 61% do nível dos EUA (tinha valores superiores a muitos países europeus: Bélgica, Holanda, Austria, etc.). No entanto, hoje este valor é de cerca de 32% apenas o que relega a Argentina para o grupo dos grandes falhanços económicos a nível internacional. Contrariamente a esta situação, países europeus que se encontravam bastante mais pobres que a Argentina há cinquenta anos atrás — como por exemplo Portugal e a Irlanda — mostraram significativos processos de convergência económica durante este longo período de tempo, chegando mesmo a Irlanda a passar de cerca de 50% para perto dos 80% em apenas cerca de vinte anos.

As discrepâncias observadas entre os países acima apresentados, não são exclusivas dos mesmos. Pelo contrário, a regra mundial parece ser a existência de grandes divergências entre os níveis de rendimento per capita dos países, bem como das suas taxas de crescimento. Na *Figura 1.4* está representada a distribuição das taxas de crescimento do PIB por trabalhador (PIBpw) a nível mundial, por escalões de taxas de crescimento que oscilam entre valores negativos e valores francamente positivos. Não deixa de ser surpreendente verificar como, para um período de

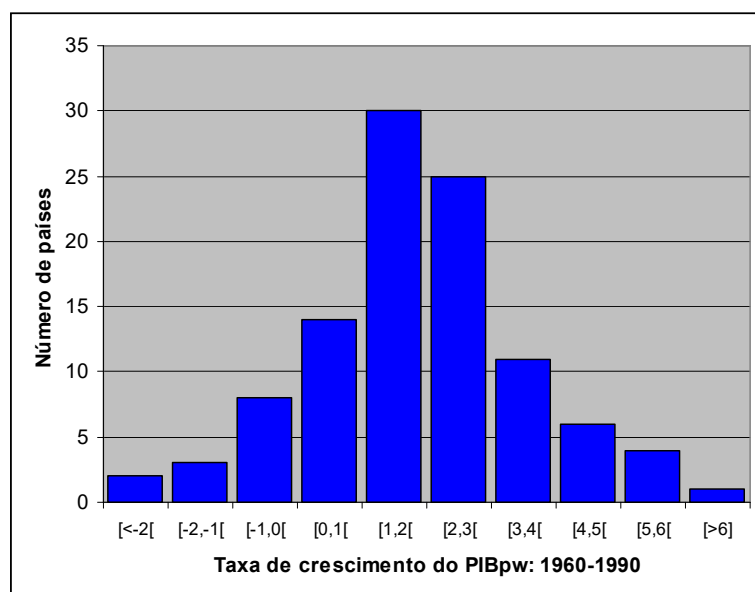


Figura 1.4: DISTRIBUIÇÃO DAS TAXAS DE CRESCIMENTO DO PIB PER CAPITA. O número de países que obtiveram taxas de crescimento para o PIB por trabalhador (PIBpw) entre $< -2\%$ e $> 6\%$ para o período 1960-1990 (104 países considerados).

aproximadamente 40 anos, um número bastante elevado de países manteve taxas de crescimento médias negativas ao longo desse período. Isto significa que um grande número de economias, não só não foi capaz de melhorar as condições médias de vida das suas populações, como estas condições se agravaram de forma impressionante ao longo de várias décadas.

Surpreendente é também a capacidade de outro conjunto de países ter tido durante o mesmo período taxas de crescimento muito elevadas, na ordem dos 5, 6 ou mesmo 7% ao ano. A grande maioria dos países verificou, contudo, taxas de crescimento do rendimento por trabalhador entre 1% e 3%, valores mais frequentes para este extenso período. A análise desta distribuição das taxas de crescimento permite-nos perceber melhor as fortes discrepâncias observadas actualmente em termos de níveis de PIB per capita.

1.2.2 Crescimento, geografia e externalidades

Com o gráfico anterior procurámos visualizar a distribuição das taxas de crescimento dos diferentes países para o período compreendido entre

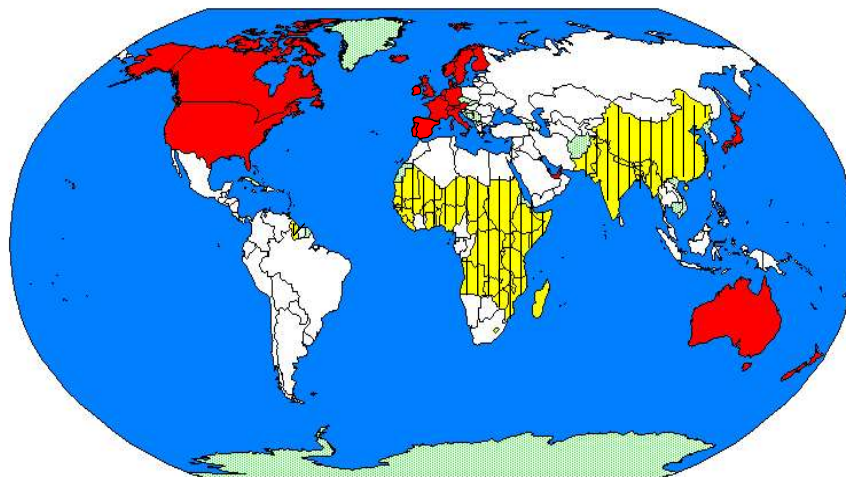


Figura 1.5: A CONCENTRAÇÃO GEOGRÁFICA DA RIQUEZA E DA POBREZA A NÍVEL MUNDIAL.

1960 e 1990 e notámos que esta distribuição se terá reflectido inevitavelmente em discrepâncias nos níveis de rendimento per capita observados entre os vários países. Vamos agora verificar que esta distribuição do rendimento mundial não é *aleatória*, existindo antes uma clara concentração da riqueza e da pobreza a nível geográfico. Se a distribuição fosse aleatória, os países ricos e os países pobres deveriam estar misturados uns com os outros em termos geográficos, não se verificando grandes "bolsas" ou regiões onde praticamente só existem países pobres e outras onde só existem países ricos. Na *Figura 1.5* esta ideia é visível pelas várias manchas apresentadas (vermelhas, brancas e tracejadas). As manchas de cor vermelha indicam os países com níveis de rendimento per capita elevados, os quais estão concentrados na América do Norte, na Europa Central e na Oceania. As manchas a tracejado (indicando grande pobreza) estão também concentradas, mas agora na África Sub-Sahariana e na Ásia. Os países de rendimento per capita médio também estão concentrados (zonas a branco) na América Latina, no norte de África, no Médio Oriente e nos vários países que compunham a antiga União Soviética.

O que esta distribuição nos sugere é a existência de *externalidades* positivas e negativas no processo de crescimento económico, as quais fazem com que as regiões situadas próximas de outras onde o nível de rendimento é elevado sejam beneficiadas com isso e apresentem também um rendimento per capita elevado, ou seja, beneficiem dessa proximidade em

termos económicos devido a *externalidades positivas*. O mesmo raciocínio pode ser aplicado para os países situados próximos de países bastante pobres, só que agora as externalidades terão uma natureza negativa, o que se acaba por se reflectir em constrangimentos ao seu desenvolvimento económico e faça com nível de rendimento per capita permaneça semelhante ao da sua vizinhança.

1.2.3 Factos estilizados do crescimento

Os factos acima discutidos representam algumas das características fundamentais do processo de crescimento económico a nível mundial ao longo das últimas décadas. Existem outros que, apesar de não poderem ser aqui ilustrados (porque exigiam uma longa exposição), são importantes para testar as várias teorias sobre os factores que explicam o crescimento económico.

Em 1961, Nicholas Kaldor⁵, um economista da Universidade de Cambridge, identificou um conjunto de regularidades relacionadas com o crescimento económico que nos podem ajudar a sintetizar os diferentes aspectos por detrás do crescimento económico. As regularidades por ele detetadas foram de tal forma confirmadas empiricamente por diferentes autores (pelo menos no que se refere aos países desenvolvidos) que ficaram conhecidas como *factos estilizados* do crescimento económico. Os economistas deverão ter então como principais factos a explicar no crescimento económico de *longo prazo* os seguintes (os dois últimos aqui acrescentados não foram avançados por Kaldor, nem reúnem o consenso dos economistas):

- PIB per capita cresce a taxas constantes no longo prazo
- Capital per capita cresce a uma taxa constante no longo prazo
- A taxa de juro real permanece constante no longo prazo
- A taxa de salário real cresce a uma taxa constante no longo prazo
- A distribuição de rendimento por factores permanece constante no longo prazo
- Não existe convergência económica a nível mundial, apesar de poder existir dentro de certas zonas geográficas
- A pobreza e a riqueza estão grandemente concentrados a nível mundial, o que sugere a existência de externalidades positivas e negativas no processo de crescimento económico

⁵Kaldor, N. (1961), "Economic Growth and Capital Accumulation", in F. Lutz e D.C. Hague (Eds.), *The Theory of Capital*, Macmillan, London

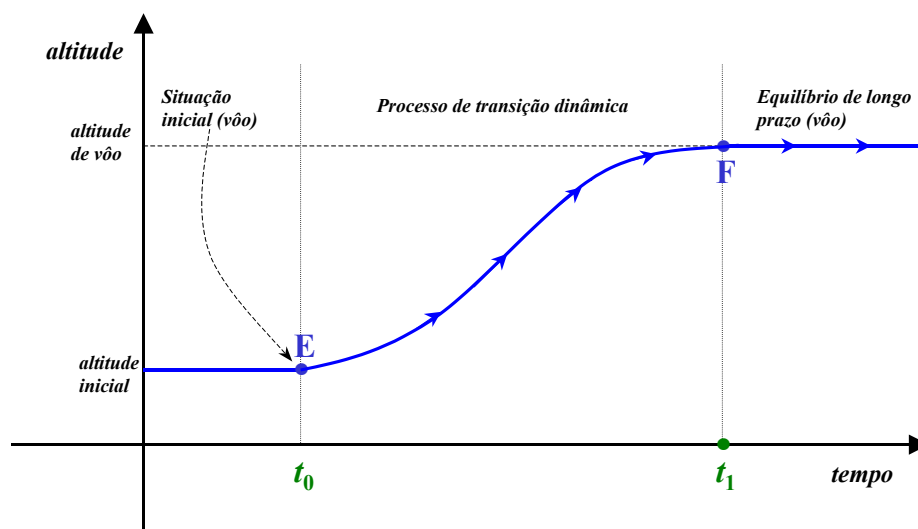


Figura 1.6: OS TRÊS INGREDIENTES DE UM PROCESSO DINÂMICO. Uma situação inicial; o equilíbrio de longo prazo, e o processo de transição dinâmica.

1.3 Ingredientes dos Modelos de Longo Prazo

Os processos dinâmicos são processos em que as variáveis endógenas evoluem ao longo do tempo. Por este motivo, estes processos têm normalmente sempre três ingredientes fundamentais: uma situação inicial (ou condição inicial); um equilíbrio de longo prazo (ELP); e um processo de transição dinâmica. Estes três ingredientes dos processos dinâmicos podem ser comparados com as diferentes fases do estado de um avião num vôo após deixar o estacionamento numa pista de aeroporto (vide *Figura 1.6*).

Primeiro, temos a situação inicial (t_0) em que o avião se encontra no solo e o seu estado permanece constante. Depois, o vôo é iniciado através de uma grande aceleração, descola e ganha altitude durante um determinado período de tempo — normalmente num curto período de tempo (curto prazo) — estando num processo de transição até t_1 ser alcançado. Finalmente, em t_1 o avião estabiliza o seu estado, alcançando a trajetória normal de vôo que irá manter durante um grande período de tempo (longo prazo). Temos aqui os três ingredientes das análises dinâmicas, quer estas sejam em aeronáutica, em economia ou noutras disciplinas:

- uma *situação inicial*;

- um *processo de transição* dinâmica que, neste caso, se verifica entre a situação inicial e o equilíbrio de longo prazo;
- um *equilíbrio de longo prazo*, o qual, após ter sido atingido, é mantido por um longo período de tempo, se não surgir nenhuma perturbação adicional.

Convém definir com algum rigor estes ingredientes dos modelos dinâmicos. No nosso exemplo, a definição da situação (ou condição) inicial é o *estado* do avião enquanto ele se encontra estacionado na pista do aeroporto. A sua aceleração e velocidade são *constantes* (neste caso nulas) e a altitude em que o mesmo se encontra é também constante. Se a variável em questão for designada por x (por exemplo, a altitude do avião), a condição inicial é o valor de x_t quando $t = 0$. Esta condição é normalmente apresentada por x_0 .

Por outro lado, o equilíbrio de longo prazo não é mais do que o *estado* do avião na sua trajectória de vôo após o processo de descolagem estar terminado. Note que, apesar do avião se encontrar numa situação de equilíbrio durante o vôo, o mesmo não permanece imóvel. Ou seja, a aceleração e a velocidade *são constantes* (embora neste caso já diferentes de zero), bem como a altitude; no entanto, ele desloca-se no espaço ao longo do tempo.

Fazendo a analogia com os modelos económicos dinâmicos que iremos estudar, isto serve para salientar que um equilíbrio dinâmico ou de longo prazo não requer necessariamente que, quer a economia, quer uma variável económica endógena, tenham de permanecer inalteradas ou imutáveis ao longo do tempo. Requer, no entanto, que o estado da variável que se estude esteja a evoluir no tempo a uma *taxa constante*. No exemplo do avião, este está em equilíbrio no vôo porque se desloca ao longo do tempo no espaço a uma velocidade constante (ou a uma aceleração e altitude constantes). Isto significa que numa economia, as variáveis endógenas terão alcançado o equilíbrio de longo prazo quando estiverem a crescer a uma *taxa constante*, a qual pode ser positiva, nula, ou mesmo negativa.⁶

Definição 1 *Equilíbrio de longo prazo (ELP)*. Este equilíbrio é definido como um estado em que, num processo dinâmico, as variáveis económicas endógenas crescem a uma taxa constante, a qual pode ser positiva, nula, ou negativa, e em que o período temporal considerado é o longo prazo (tempo pode variar entre 0 e ∞).

Um processo de transição dinâmica é agora fácil de definir. É o processo dinâmico que ocorre entre dois equilíbrios de longo prazo, ou

⁶Deve notar, no entanto, que em economia não existe evidência de muitas variáveis que crescem permanentemente a taxas negativas.

entre a condição inicial e o equilíbrio de longo prazo (note que a condição inicial satisfaz as condições de um equilíbrio de longo prazo). Enquanto que as variáveis endógenas têm de crescer sempre a taxas constantes no ELP, durante um processo de transição dinâmica estas variáveis podem crescer a taxas crescentes ou decrescentes. No entanto, estas taxas tendem para uma situação de estabilidade quando a economia converge para o novo equilíbrio de longo prazo. Na *Figura 1.6* podemos observar cada uma das fases referidas com as suas respectivas características.

Existe frequentemente uma certa confusão entre equilíbrios de longo prazo e processos de transição dinâmica. Isto leva normalmente a erros grosseiros na análise de situações económicas de natureza dinâmica e origina a implementação de medidas de política económica perigosas porque podem produzir, muitas das vezes, efeitos contrários aos pretendidos. Por exemplo, uma variável pode estar a crescer a taxas elevadas, mas isto ser um reflexo da mesma estar a percorrer um processo de transição dinâmica. Quando tiver alcançado o equilíbrio de longo prazo, a sua taxa de crescimento pode ser bastante diferente da que tinha durante o processo de transição.

Definição 2 *Processo de transição dinâmica.* Este processo representa o ajustamento da economia, e das variáveis endógenas, entre a condição inicial e o equilíbrio de longo prazo, ou entre dois equilíbrios de longo prazo (neste caso, o processo resulta de uma alteração numa das variáveis exógenas, ou em várias). Neste processo de transição, as variáveis económicas endógenas podem crescer a taxas crescentes ou decrescentes.

Estivemos a analisar uma situação em que um processo dinâmico comporta a existência de pelo menos um equilíbrio de longo prazo. Na verdade, nem todos os modelos admitem esta possibilidade, existindo modelos onde a economia nunca atinge um equilíbrio de longo prazo (como teremos oportunidade de demonstrar na secção seguinte), ou onde a economia pode apresentar vários equilíbrios de longo prazo.

Assim, para além das definições do equilíbrio de longo prazo e do processo de transição dinâmica, existem três questões fundamentais associadas à discussão deste equilíbrio que deverão sempre estar presentes num estudo cuidadoso sobre processos dinâmicos em economia. A primeira questão está relacionada com a "existência" de um equilíbrio de longo prazo: Será que a variável que expressa o processo dinâmico em estudo tende para um determinado valor constante no longo prazo? Ou seja, será que tende para um "ELP", será que existe um "ELP"? A segunda relaciona-se com a "estabilidade" do equilíbrio de longo prazo: Se existir um ELP, será este equilíbrio estável ou instável? Ou seja, se por alguma

razão a variável for forçada a "sair" desse equilíbrio, volta ao mesmo ao fim de algum tempo ou diverge deste? Finalmente a terceira questão prende-se com a "multiplicidade" de equilíbrios: Se existir um ELP, só existe um único equilíbrio ou existem vários?

Para responder a estas questões é necessário, primeiro que tudo, mostrar qual a condição que terá de se verificar para que exista um equilíbrio de longo prazo. É isso que vamos fazer de seguida.

1.4 A Determinação do Equilíbrio de Longo Prazo

Nesta secção vamos introduzir alguns exemplos de *equações diferenciais e equações às diferenças*, as quais são equações matemáticas utilizadas para descrever processos dinâmicos em que o tempo decorre, respectivamente, em termos contínuos e em termos discretos. Pretendemos esclarecer algumas regras metodológicas de resolução algébrica e gráfica de processos dinâmicos, sobretudo no que diz respeito à determinação e caracterização do equilíbrio de longo prazo, com vista a simplificar a posterior introdução e resolução de modelos dinâmicos na restante parte do livro. Vamos começar por apresentar as equações às diferenças e passamos depois para as equações diferenciais.

Deve lembrar que as questões fundamentais a que devemos ser capazes de dar resposta relativamente ao equilíbrio de longo prazo (ELP) são as seguintes:

- *Existência*: Será que um processo dinâmico tem um equilíbrio de longo prazo?
- *Estabilidade*: Se este ELP existir, é estável ou instável?
- *Multiplicidade*: Será o ELP único, ou existem equilíbrios múltiplos?

1.4.1 Equações às diferenças

Uma *equação às diferenças* representa a evolução de uma variável ao longo do tempo em que a mesma aparece expressa em períodos temporais distintos e assumindo que o tempo (t) decorre de forma discreta, ou seja, $t = 0, 1, 2, \dots$. O exemplo económico mais comum é o de uma aplicação financeira, na qual a *variação* do valor aplicado financeiramente ao longo de um determinado período depende do *próprio valor* do montante aplicado nesse mesmo período. Senão vejamos.

Suponha que faz hoje uma aplicação financeira num montante de 1000 euros. A taxa de juro anual é de 5%. Daqui a um ano qual será o valor desta aplicação financeira? Ou dito de outra maneira, qual é a variação

que se processa no valor inicialmente aplicado ao longo de um ano? A equação matemática que serve para exprimir esta aplicação financeira é a seguinte:

$$x_{t+1} = x_t + 0.05 \cdot x_t \quad , \quad t = 0, 1, 2, \dots$$

ou de uma forma totalmente equivalente

$$\begin{aligned} x_{t+1} - x_t &= 0.05 \cdot x_t \\ \Delta x_t &= 0.05 \cdot x_t \end{aligned} \tag{1.4}$$

Ou seja, a variação da variável ao longo de um período de tempo (Δx_t) depende do valor da própria variável no início desse período de tempo (x_t). Mesmo que mais nenhuma força externa intervenha neste processo, a variável x_t vai evoluindo ao longo do tempo com base numa *dinâmica interna*, o que não se verifica num modelo estático onde o equilíbrio "pula" de um período para o outro devido exclusivamente a forças externas ao processo.

Para dar resposta às três questões fundamentais dos sistemas dinâmicos (*existência, estabilidade, multiplicidade*) vamos utilizar um exemplo de uma equação às diferenças bastante simples. Suponha um processo dinâmico que pode ser descrito pela seguinte equação

$$x_{t+1} = 10 + a \cdot x_t \tag{1.5}$$

Nesta equação, a variação de x_t depende do valor assumido por a , o qual é um parâmetro do processo e que acaba por determinar de forma crucial a sua dinâmica ao longo do tempo. Existem três valores que produzem resultados totalmente diferentes quanto às perguntas acima colocadas. $a < 1$, $a > 1$, e $a = 1$. Consoante cada um destes casos, vamos ter diferentes soluções para o processo dinâmico relativamente à existência, estabilidade e unicidade do equilíbrio de longo prazo.

Para se determinar se o processo tem um ELP ou não, basta aplicar a seguinte condição à equação (1.5)

$$x_{t+1} - x_t = 0$$

Isto significa que o processo dinâmico estabiliza quando a variável x_t permanecer constante, ou seja *nem cresce nem decresce ao longo do tempo*. Num processo discreto isto acontece quando no momento $t + 1$ o valor assumido por x for exactamente igual ao seu valor no momento t , ou seja, quando $x_{t+1} = x_t$. Se num determinado período x_{t+1} assume valores superiores a x_t , ($x_{t+1} > x_t$), a variável está a crescer ao longo do tempo; enquanto se x_{t+1} assume valores inferiores aos assumidos pela variável no momento anterior ($x_{t+1} < x_t$) então x_t está a decrescer. Tudo isto pode ser resumido no seguinte quadro

$x_{t+1} > x_t$	\implies	$x_t \uparrow$
$x_{t+1} < x_t$	\implies	$x_t \downarrow$
$x_{t+1} = x_t$	\implies	$x_t = x^*$ (constante)

O nosso próximo passo será considerar diferentes valores para a e, tendo em conta aquilo que acabámos de afirmar relativamente à determinação do equilíbrio de longo prazo com equações às diferenças, verificar quais são as implicações para a determinação do equilíbrio bem como para a sua estabilidade e unicidade.

1º caso: $a = 0.5$

Neste caso, a equação (1.5) passa a ter a expressão

$$x_{t+1} = 10 + 0.5 \cdot x_t$$

A resolução numérica desta equação permite-nos encontrar o equilíbrio do sistema e obtém-se impondo a condição de equilíbrio $x_{t+1} = x_t = x^*$ de onde resulta

$$x_{t+1} = x_t = x^* = 20$$

A resposta à primeira questão (*existência* de equilíbrio) pode ser apresentada: sabemos que o processo dinâmico tem um ponto de equilíbrio, o qual é alcançado quando a variável x_t apresentar o valor de 20 unidades.

Para responder às duas restantes questões (*unicidade* e *estabilidade*) devemos recorrer à análise gráfica. Primeiro que tudo, note que o valor de equilíbrio pode também ser obtido a partir de uma análise gráfica conforme *Figura 1.7*. Nesta figura representamos no eixo das abcissas os valores assumidos por x_t e no eixo das ordenadas o valor assumido por x_{t+1} . A condição de equilíbrio está representado por uma recta com uma inclinação de 45° , indicando as situações em que $x_{t+1} = x_t$. A azul temos representada a equação às diferenças que estamos a analisar (neste caso com $a = 0.5$), e o equilíbrio de longo prazo dá-se no ponto de intersecção entre as duas rectas representadas, na medida em que corresponde à situação em que a variável estabiliza com o decorrer do tempo.

Que o equilíbrio existe é fácil de perceber através de uma breve inspecção da *Figura 1.7*. Que o mesmo é *único* também é imediato pois as duas rectas só se cruzam uma única vez, no ponto $x_{t+1} = x_t = x^* = 20$. A questão que resta analisar é a da estabilidade deste equilíbrio de longo prazo.

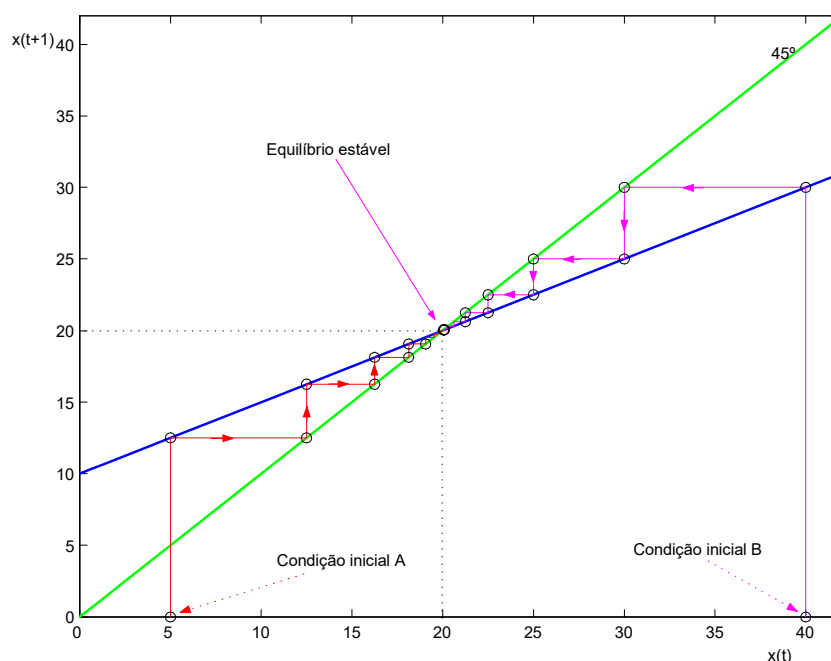


Figura 1.7: O EXEMPLO DE UM EQUILÍBRIO ESTÁVEL

Sabemos que se o processo dinâmico começar com a variável x_t a assumir um valor de 20, ou seja se $x_0 = 20$, ela irá permanecer com esse valor ao longo do tempo, basta para tal substituir $x_0 = 20$ na equação e obter o valor do período seguinte (x_1), $x_1 = 10 + 0.5 \cdot 20 = 20$, e proceder para os períodos seguintes da mesma forma: $x_1 \rightarrow x_2 \rightarrow x_3 \rightarrow \dots$, onde verificaremos que todos eles dão o mesmo valor 20 para x_t . No entanto, o que acontece se o valor inicial for diferente do valor de equilíbrio de longo prazo? Vamos exemplificar com duas situações distintas, no caso A a condição inicial é dada por $x_0 = 5$, e no caso B por $x_0 = 40$? Aplicando o mesmo tipo de raciocínio podemos verificar que se o processo começar com $x_0 = 5$, teremos $x_1 = 12.5$, $x_2 = 16.25$, $x_3 = 18.125$, e assim sucessivamente até se atingir o valor de equilíbrio x_t , $x^* = 20$. No outro caso, em que o valor inicial é superior ao respectivo valor de equilíbrio, teremos a seguinte sucessão: $x_0 = 40$, $x_1 = 30$, $x_2 = 25$, ..., $x^* = 20$. Portanto, se partirmos de uma situação inicial em que o valor da variável é dado por $x_0 < x^*$, no período seguinte esta vai ter um valor superior de forma sucessiva, o que significa que x_t cresce até alcançar o valor de equilíbrio $x^* = 20$. Por outro lado, se o ponto de partida for $x_0 > x^*$ a variável x_t vai decrescendo até alcançar o ponto de equilíbrio $x^* = 20$. Assim, da análise gráfica podemos concluir que o equilíbrio é estável,

na medida em que o processo termina sempre no ponto de equilíbrio, independentemente da situação de partida. Mesmo que por qualquer razão este processo for forçado a sair do seu equilíbrio de longo prazo, voltará a alcançar o mesmo ao fim de um determinado número de períodos de tempo.

Conclusão 1.3 *Se o parâmetro "a" assumir um valor menor que a unidade ($a < 1$), o equilíbrio, para além de existir e ser único, é também estável. Isto já não se verifica no exemplo seguinte em que $a > 1$.*

2º caso: $a = 1.5$

Quando consideramos $a = 1.5$, a equação às diferenças fica dada por

$$x_{t+1} = 10 + 1.5 \cdot x_t$$

Para obtermos o equilíbrio de longo prazo deste processo temos que impor a condição de equilíbrio $x_{t+1} = x_t = x^*$ donde resulta como solução o seguinte resultado

$$x_{t+1} = x_t = x^* = -20$$

Vamos representar a solução gráfica desta equação através da *Figura 1.8*. Tal como no caso anterior temos um gráfico onde representamos duas rectas: uma recta a verde que nos dá os pontos onde $x_{t+1} = x_t$, com uma inclinação de 45° ; e, uma recta a azul que representa a equação às diferenças que estamos a analisar. Mais uma vez, o ponto de intersecção entre estas duas rectas dá-nos o ponto de equilíbrio do processo que, como podemos ver, ocorre agora no terceiro quadrante, onde x_t e x_{t+1} assumem valores negativos. Este equilíbrio é único, já que não existe outro ponto de intersecção entre as duas rectas.

Quanto ao tipo de estabilidade do equilíbrio, como iremos mostrar, este equilíbrio é instável. Sabemos que se o processo dinâmico começar com a variável x_t a assumir um valor inicial de -20 , ou seja se $x_0 = -20$, ela irá permanecer com esse valor ao longo do tempo. No entanto, isto não se verifica se o valor inicial for diferente deste valor de equilíbrio mesmo que seja apenas infinitesimalmente diferente. Suponha duas condições iniciais: a situação A em que $x_0 = 5$, e a situação B em que $x_0 = -40$. Aplicando o mesmo tipo de raciocínio utilizado no caso anterior, podemos verificar que se o processo começar com $x_0 = 5$, teremos $x_1 = 17.5$, $x_2 = 36.25$, e sucessivamente com x_t a atingir valores cada vez mais elevados. Na situação B, em que o valor inicial é inferior ao valor de equilíbrio, teremos a seguinte sucessão: $x_0 = -40$, $x_1 = -50$, $x_2 = -65, \dots$, com valores de x_t cada vez mais negativos.

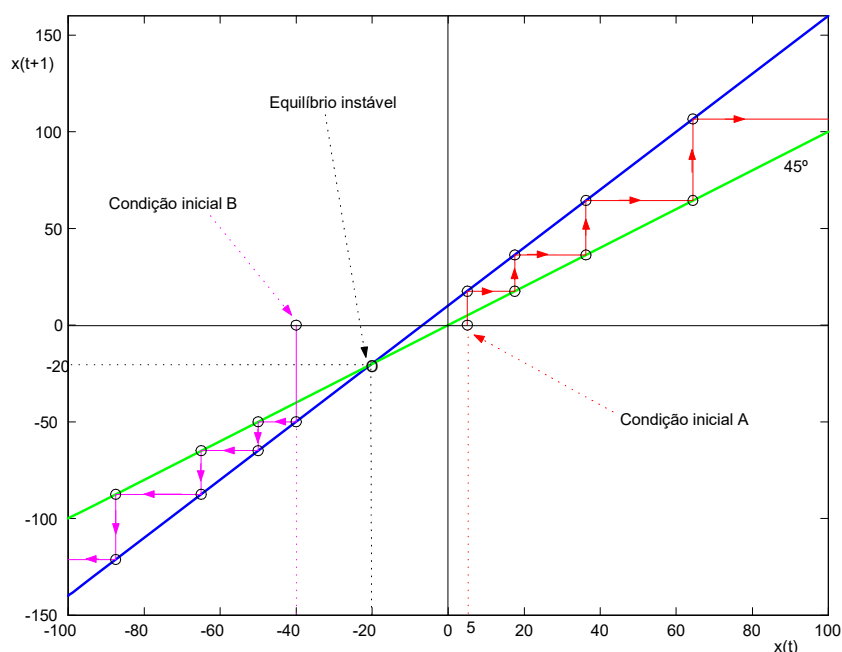


Figura 1.8: O EXEMPLO DE UM EQUILÍBRIO INSTÁVEL

Portanto, se partirmos de uma situação em que o valor da variável é dado por $x_0 < x^*$, no período seguinte esta vai assumir um valor inferior, o que significa que x_t decresce e afasta-se de forma sucessiva do equilíbrio de longo prazo. Por outro lado, se o ponto de partida for $x_0 > x^*$ a variável x_t irá crescer e afastar-se-á sucessivamente cada vez mais do equilíbrio $x^* = -20$.

Conclusão 1.4 *No caso de $a > 1$, podemos concluir da análise gráfica que o equilíbrio existe, é único, mas é instável. Se o processo for obrigado, por qualquer razão, a sair do seu equilíbrio de longo prazo, não voltará a alcançar o mesmo, afastando-se sucessivamente deste ao longo do tempo. No caso seguinte iremos ver que se $a = 1$, o processo dinâmico nem equilíbrio de longo prazo tem.*

3º caso: $a = 1$

Se considerarmos $a = 1$ a equação às diferenças será dada por

$$x_{t+1} = 10 + 1 \cdot x_t$$

A solução numérica para esta equação seria dada no ponto em que $x_{t+1} = x_t = x^*$, o que resulta numa equação impossível da forma $0 \cdot x^* =$

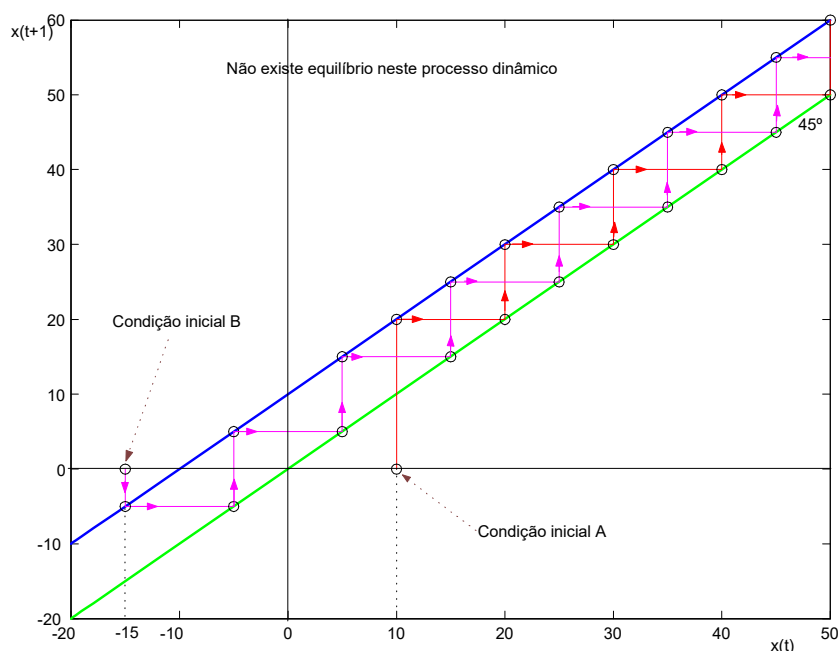


Figura 1.9: O EXEMPLO DE PROCESSO DINÂMICO SEM EQUILÍBRIO DE LONGO PRAZO.

10. Isto indica-nos que o processo não tem solução para a condição de equilíbrio, o que implica que o mesmo não tem equilíbrio de longo prazo. Graficamente, a solução deste processo é dada na *Figura 1.9* onde se representam duas rectas: a recta a verde (45°) que representa os pontos onde é possível a existência de equilíbrio; e uma recta a azul, paralela à recta de 45° , que representa a equação às diferenças que estamos a analisar (note que o declive de ambas é unitário neste exemplo). Como podemos ver, as rectas nunca se intersectam, e esta é a razão que justifica o facto do processo não comportar a existência de um equilíbrio de longo prazo.

Na *Figura 1.9* apresentamos a evolução do processo dinâmico com duas condições iniciais bem diferentes: a situação A em que $x_0 = 10$, e a situação B em que $x_0 = -15$. Aplicando o mesmo tipo de raciocínio utilizado nos casos anteriores, podemos verificar que se o processo começar com $x_0 = 10$, teremos $x_1 = 20$, $x_2 = 30$, e sucessivamente com x_t a atingir valores cada vez mais elevados. Na situação B, em que o valor inicial é $x_0 = -15$, teremos a seguinte sucessão: $x_0 = -15$, $x_1 = -5$, $x_2 = 5$, ..., com valores de x_t cada vez mais elevados.

Conclusão 1.5 No caso de $a = 1$, podemos concluir da análise gráfica

que o equilíbrio de longo prazo neste processo não existe. Independentemente das condições iniciais para x_t serem positivas ou negativas, o valor desta variável tende para infinito ao longo do tempo. Obviamente que neste caso específico nem se coloca a questão da estabilidade do equilíbrio (ou se ele é único ou não), já que o mesmo pura e simplesmente não existe.

1.4.2 Equações diferenciais

Se uma equação às diferenças é uma equação em que a variação de uma dada variável ao longo de um determinado período de tempo é função do próprio estado ou valor dessa variável no início desse período — sendo ela dada, por exemplo, na equação (1.4) por uma expressão do tipo $\Delta x_t = 0.05 \cdot x_t$, com $t = 0, 1, 2, \dots$ — então uma equação diferencial pretende representar exactamente o mesmo tipo de comportamento dinâmico com a única diferença do *tempo variar de forma contínua*. Ou seja, em vez de termos $\Delta t = 1$, porque $t = 0, 1, 2, \dots$, nas equações diferenciais como o tempo evolui de forma contínua ($t, t+h, t+2h$, com $h \rightarrow 0$) a expressão da variação de uma variável ao longo do tempo deve ser apresentada por uma expressão do tipo $\frac{dx}{dt} = 0.05 \cdot x_t$.⁷ Esta equação diz-nos que a variação de x (ou seja, dx) quando o tempo varia (dt), depende do próprio valor de x_t multiplicado por 0.05.

De forma a simplificar a exposição, vamos usar um ponto por cima de um símbolo (\dot{x}) para nos referirmos à expressão $\frac{dx}{dt}$, ou seja, por definição daqui em diante teremos

$$\dot{x} \equiv \frac{dx}{dt}$$

Um exemplo de uma equação diferencial pode ser dado por uma equação do tipo

$$\dot{x} \equiv \frac{dx}{dt} = \underbrace{4x_t^\alpha}_{f(x)} - \underbrace{0.8x_t}_{g(x)} \quad (1.6)$$

Neste exemplo, podemos ver que a equação diferencial comporta dois termos no seu lado direito: $f(x)$ e $g(x)$. O termo $g(x)$ é linear em x , enquanto $f(x)$ será ou não linear dependendo do valor do expoente α . É exactamente o valor deste expoente α que, neste exemplo específico, tem que ser estudado para se saber se a equação diferencial possui ou não um equilíbrio de longo prazo, se este é único e se é estável. Para ilustrarmos as diferentes possibilidades vamos aqui avançar com quatro casos possíveis para o valor de α , sendo estes: $\alpha = 0.5$; $\alpha = 1.5$; $\alpha = 1$ e, finalmente, um

⁷Note que uma equação às diferenças $\Delta x_t = 0.05 \cdot x_t$ pode também ser escrita como $\frac{\Delta x_t}{\Delta t} = 0.05 \cdot x_t$. Como $t = 0, 1, 2, \dots$, então $\Delta t = 1$ para todo o t , o que permite simplificar a expressão da equação às diferenças e apresentá-la na sua expressão mais simples $\Delta x_t = 0.05 \cdot x_t$.

valor para α de forma a que $f(x)$ apresente um comportamento bastante não linear.

Antes de estudar cada um destes quatro casos com algum detalhe, convém apresentar a condição que terá necessariamente de se verificar para que exista um equilíbrio de longo prazo numa equação diferencial. Nas equações às diferenças, a condição era que $x_{t+1} - x_t = 0$, ou seja que $\Delta x_t = 0$. No caso das equações diferenciais, a condição é exactamente a mesma (que a variação da variável seja igual a zero quando o tempo varia) só que agora esta condição é dada pela expressão

$$\dot{x} \equiv \frac{dx}{dt} = 0$$

Com esta condição pretendemos determinar qual é o valor que a variável x_t assume de forma a que, uma vez alcançado, x_t estabiliza ($\dot{x} = 0$). No caso da equação (1.6) não é difícil compreender que isto se passará quando a parcela da equação diferencial representada por $f(x)$ for exactamente igual à parcela representada por $g(x)$. Fora do equilíbrio podemos ter uma de duas situações: ou a equação diferencial está a variar positivamente, ou está a variar negativamente. A equação varia positivamente ($\dot{x} > 0$) quando $f(x) > g(x)$, o que implica que a variável x_t estará a crescer ao longo do tempo (ou seja, a variação desta variável é positiva). A variação negativa da equação diferencial ($\dot{x} < 0$) ocorrerá quando $f(x) < g(x)$, caso em que a variação de x_t é negativa e, portanto, a variável x_t estará a decrescer no decorrer do tempo.

Podemos sintetizar este raciocínio no seguinte quadro

$\dot{x} > 0$	\implies	$f(x) > g(x)$	\implies	$x_t \uparrow$
$\dot{x} < 0$	\implies	$f(x) < g(x)$	\implies	$x_t \downarrow$
$\dot{x} = 0$	\implies	$f(x) = g(x)$	\implies	$x_t = x^*$ (constante)

Vamos agora atribuir diferentes valores ao expoente α e, tendo em conta as considerações que acabámos de fazer sobre a relação entre o comportamento da equação diferencial e o equilíbrio de longo prazo, tentar determinar este equilíbrio para cada caso particular que for sendo analisado.

1º caso: $\alpha = 0.5$

Atribuindo o valor $\alpha = 0.5$, podemos encontrar uma solução numérica para o problema proposto. O primeiro passo consiste em determinar se

esta equação tem equilíbrio. Impondo a condição de equilíbrio $\dot{x} = 0$, a solução para a equação (1.6)

$$\dot{x} = 0 \implies \underbrace{4x_t^{0.5}}_{f(x)} = \underbrace{0.8x_t}_{g(x)}$$

o que implica a existência de dois valores para x_t que garantem tal condição

$$x^* = 25 \text{ ou } x^* = 0$$

Através destes resultados sabemos que quando a variável x_t alcança o valor de 25 unidades, ou quando tiver o valor 0, a sua variação será nula ao longo do tempo.

Vamos agora recorrer à análise gráfica desta mesma equação, com vista a estudar a estabilidade dos equilíbrios que já conhecemos. No entanto, existe um pormenor que deve ser bem realçado pois tem grande importância para a análise económica. Note apesar de $x^* = 0$ ser um equilíbrio de longo prazo para este processo dinâmico, em economia este tipo de equilíbrio (apresentando valores nulos para as variáveis) é designado por "equilíbrio trivial" já que a maioria das variáveis económicas assumem valores positivos (o stock de capital, a produção, o emprego, os preços, o consumo, etc., todos têm normalmente valores positivos). Portanto, vamos analisar aqui os dois equilíbrios (o trivial $x^* = 0$, e o não-trivial $x^* = 25$) apenas para mostrar como as técnicas devem ser aplicadas. No entanto, em economia apenas faz sentido analisar o "equilíbrio não-trivial".

Na *Figura 1.10* temos o gráfico da equação (1.6) para $\alpha = 0.5$. No eixo das abcissas está representada a variável x_t e no eixo das ordenadas estão representadas as duas componentes da equação diferencial (1.6) — as funções $f(x)$ e $g(x)$. A função $g(x)$ encontra-se representada por uma recta (recorde-se que esta função é linear em x_t), enquanto a função $f(x)$ está representada por uma função côncava (o que resulta de $\alpha = 0.5$). Os pontos de intersecção entre estas duas funções — e que são $x^* = 25$ e $x^* = 0$ — correspondem aos pontos em que ambas assumem o mesmo valor pelo que a equação diferencial se anula ($\dot{x} = 0$). Portanto, estes pontos correspondem às situações de equilíbrio de longo prazo.

Para sabermos se cada um dos equilíbrios é estável ou instável vamos estudar o comportamento da variável x_t à direita e à esquerda de cada um dos pontos. Começemos pelo ponto E. À esquerda do ponto de equilíbrio E, a função $f(x)$ está situada acima da função $g(x)$. Portanto, os valores assumidos por $f(x)$ são superiores aos valores assumidos por $g(x)$, logo, a equação diferencial varia positivamente ($\dot{x} > 0$) o que implica que a variável x_t tem que estar a crescer no tempo. À direita do ponto de

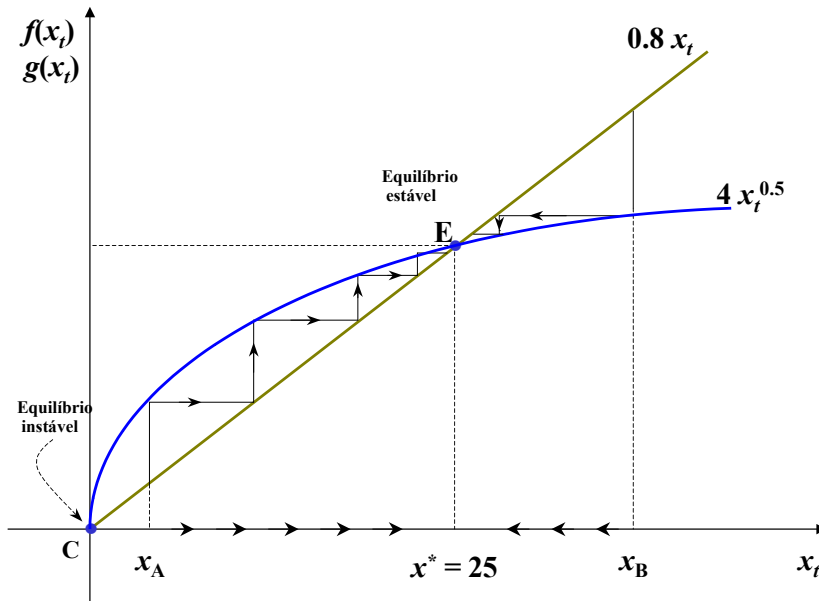


Figura 1.10: O EXEMPLO COM UM EQUILÍBRIO ESTÁVEL NÃO-TRIVIAL E OUTRO INSTÁVEL E TRIVIAL

equilíbrio E temos uma situação oposta, a função $f(x)$ situa-se abaixo da posição da função $g(x)$, pelo que $f(x)$ assume valores inferiores aos assumidos por $g(x)$. Como consequência, à direita do ponto E, a equação diferencial é negativa ($\dot{x} < 0$) e a variável x_t está a decrescer ao longo do tempo. Este comportamento da variável x_t à direita e à esquerda do ponto de equilíbrio E, permite-nos constatar que o equilíbrio neste ponto é estável. Assim, se partirmos, por exemplo, do ponto x_A , situado à esquerda de E, a variável x_t começará a crescer até alcançar o valor de equilíbrio ao fim de algum tempo. Partindo de x_B , situado à direita do equilíbrio, verifica-se o oposto, a variável x_t vai decrescer até alcançar o valor de equilíbrio, onde estabilizará.

Quanto ao equilíbrio dado pelo ponto C, já vimos acima que à direita do mesmo a variável x_t cresce ao longo do tempo. Ou seja, qualquer valor inicial para x_t mesmo que apenas infinitesimalmente superior a zero, levará a variável para $x^* = 25$. Não exemplificamos aqui em termos gráficos o que acontece para valores iniciais de x_t negativos, no entanto é imediato inferir que a evolução de x_t é semelhante àquela que ela apresenta à direita do ponto E, porque $f(x) < g(x)$. Portanto, à esquerda do ponto C, a equação diferencial é negativa ($\dot{x} < 0$) e, consequentemente, a variável x_t está a decrescer ao longo do tempo.

Conclusão 1.6 No caso de $\alpha = 0.5$, podemos concluir da análise gráfica que o equilíbrio de longo prazo neste processo existe, mas não é único (existe mais do que um equilíbrio). Um dos equilíbrios é estável (ponto E), o que implica que se o processo for obrigado, por qualquer razão, a sair deste equilíbrio de longo prazo, voltará a alcançar o mesmo ao fim de algum tempo. O segundo equilíbrio (ponto C) é um equilíbrio instável, o que significa que se o processo sair deste equilíbrio, não voltará a alcançar o mesmo, afastando-se sucessivamente deste ao longo do tempo.

Conclusão 1.7 Note que em termos económicos, o ponto de equilíbrio que é instável, ponto C neste exemplo, não tem grande relevância na maioria dos casos. Em economia, a maioria das variáveis assumem valores positivos (os valores da produção, do consumo, da poupança, da população activa, dos preços, etc., são positivos) pelo que um equilíbrio de longo prazo que apresente um valor nulo para a variável em questão não é muito útil. Este tipo de equilíbrios chamam-se "equilíbrios triviais" porque não têm relevância económica.

2º caso: $\alpha = 1.5$

Vamos proceder como no caso anterior, começando por encontrar a solução numérica para a equação (1.6), que será dada por

$$\dot{x} = 0 \implies \underbrace{4x_t^{1.5}}_{f(x)} = \underbrace{0.8x_t}_{g(x)}$$

implicando a existência de dois valores para x_t que garantem tal condição

$$x^* = 0.04 \text{ ou } x^* = 0$$

A solução gráfica para este problema encontra-se representada na *Figura 1.11*. Como no caso anterior, os equilíbrios estão representados pela intersecção entre as duas funções, que acontece nos pontos $x^* = 0.04$ e $x^* = 0$.

Neste exemplo, a função $f(x)$ tem agora uma forma convexa, o que faz com que a sua relação com $g(x)$ seja diferente do caso anterior. Assim, valores iniciais para x_t à esquerda do ponto de equilíbrio E fazem com que $f(x)$ assumam valores inferiores aos de $g(x)$. Logo, a equação diferencial está a variar negativamente ($\dot{x} < 0$) o que implica que x_t esteja a decrescer ao longo do tempo até alcançar o valor zero. Valores iniciais à direita do equilíbrio E, $f(x)$ encontra-se acima de $g(x)$, o que faz com que a equação diferencial varie positivamente ($\dot{x} > 0$) e a variável x_t esteja a crescer ao longo do tempo afastando-se progressivamente do ponto de equilíbrio E. Consequentemente, o ponto $x^* = 0.04$ representa um *equilíbrio instável*:

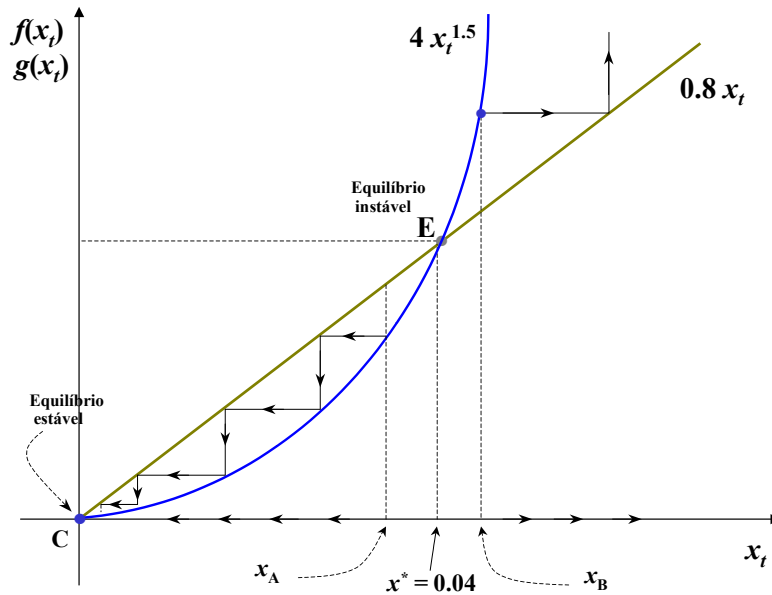


Figura 1.11: O EXEMPLO COM UM EQUILÍBRIO INSTÁVEL NÃO TRIVIAL E OUTRO ESTÁVEL E TRIVIAL

se o processo for forçado a sair do ponto E para o ponto x_B , vamos ter a variável x_t a crescer e a tender para infinito, não se alcançando o ponto E; se partir de x_A , a variável x_t vai decrescer até alcançar o valor zero. Note que apesar de ser instável este equilíbrio é relevante (não-trivial) do ponto de vista económico pois x_t assume valores diferentes de zero.

No caso do ponto C, já vimos que valores iniciais para x_t à direita do ponto de equilíbrio C fazem com que $f(x)$ assumam valores inferiores aos de $g(x)$, e, conseqüentemente, a equação diferencial está a variar negativamente ($\dot{x} < 0$) e x_t irá convergir para zero ao longo do tempo. Valores iniciais à esquerda de C produzem uma evolução de x_t exactamente oposta, levando x_t a aumentar até alcançar o valor zero. Ou seja, o ponto C, em que $x^* = 0$, é um *equilíbrio estável* embora seja trivial do ponto de vista económico.

Conclusão 1.8 No caso de $\alpha = 1.5$, temos que o equilíbrio de longo prazo existe, mas não é único (existe mais do que um equilíbrio). O equilíbrio com relevância económica (ponto E) é instável, o que implica que se o processo for obrigado, por qualquer razão, a sair deste equilíbrio, não voltará a alcançar o mesmo ao longo do tempo. O segundo equilíbrio (ponto C) é um equilíbrio estável mas é economicamente trivial, sem grande relevância do ponto de vista económico.

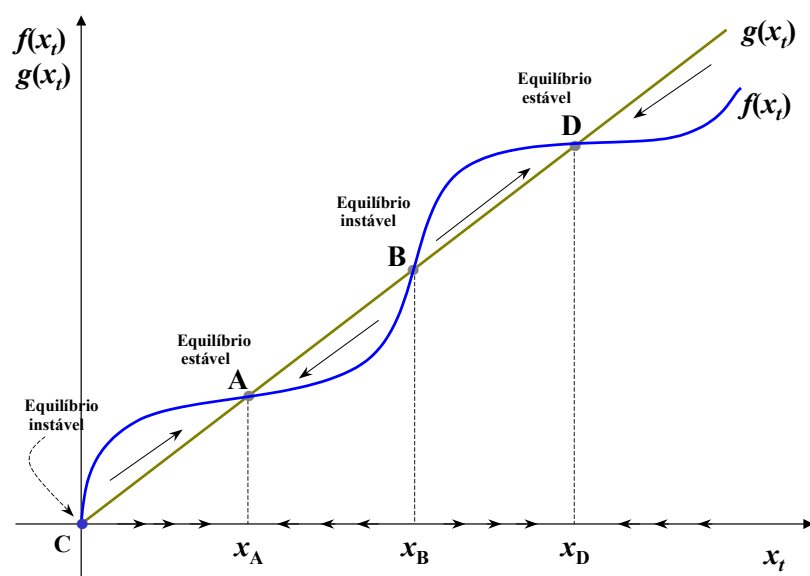


Figura 1.12: VÁRIOS EQUILÍBRIOS NÃO-TRIVIAIS, INSTÁVEIS, E ESTÁVEIS.

3º caso: $f(x)$ a comportar-se com não-linearidade acentuada

Até agora vimos dois exemplos que apresentavam *apenas um* equilíbrio relevante (ou não-trivial) do ponto de vista económico: no primeiro, este equilíbrio era estável porque $f(x)$ era côncava, no segundo este era instável porque $f(x)$ era convexa. Vamos agora mostrar como um processo dinâmico pode ter *vários equilíbrios não-triviais*. Como já deve ter percebido, para tal basta apresentar uma função $f(x)$ que tenha partes em que seja côncava e outras em que seja convexa. A *Figura 1.12*, mostra um tipo de função que permite obter equilíbrios múltiplos que sejam não-triviais.

A condição para se determinar estes equilíbrios já é nossa conhecida $\dot{x} = 0$. No entanto, com este tipo de função $f(x)$, a aplicação desta condição leva a vários equilíbrios múltiplos não triviais

$$\dot{x} = 0 \implies \text{vários equilíbrios não-triviais}$$

A questão que resta saber é quais destes são estáveis e instáveis. A resposta pode ser claramente observada através da solução gráfica do problema representada na *Figura 1.12*. Nesta estão representados três pontos de equilíbrio não triviais (A, B e D) pelo que podemos já verificar que nesta situação o equilíbrio não é único, é múltiplo. Quanto à natureza destes equilíbrios, ela é diferenciada, estando representados dois equilíbrios de tipo estável e um de tipo instável. Vamos aqui socorrermos da análise já efectuada para os casos $\alpha = 0.5$ e $\alpha = 1.5$, quanto à

relação existente entre $f(x)$ e $g(x)$ e o comportamento da variável x_t . Assim, o equilíbrio representado pelo ponto A é claramente um equilíbrio estável, pois, valores iniciais para x_t à sua esquerda fazem com que esta variável esteja a crescer ao longo do tempo, enquanto que valores à sua direita fazem com que esta decresça ao longo do tempo. O mesmo se verifica para o ponto de equilíbrio designado por D. No ponto B temos uma situação de equilíbrio instável porque partindo de um ponto situado à esquerda do mesmo, a variável x_t decresceria até alcançar o ponto de equilíbrio estável A; enquanto que, partindo de um ponto situado à direita de B, a variável x_t crescerá até alcançar o ponto de equilíbrio estável D. Resumindo, existem vários equilíbrios não-triviais, dois são estáveis e um é instável.

4º caso: $\alpha = 1$

Neste caso, a equação diferencial adquire a forma $\dot{x} = 4x_t - 0.8x_t$ cuja solução numérica se determina impondo a condição habitual

$$\dot{x} = 0 \implies 4x_t = 0.8x_t$$

implicando a existência de apenas um valor para x_t que garante tal condição

$$x^* = 0$$

Note que para valores de x_t diferentes de zero não existe equilíbrio pois a equação representa uma impossibilidade: $4x_t = 0.8x_t$ é impossível para qualquer valor de x_t . Ou seja, neste exemplo, não existe um equilíbrio de longo prazo que seja relevante do ponto de vista económico (o único que existe é trivial).

Graficamente este caso está representado na *Figura 1.13* onde a função $f(x)$ e a função $g(x)$ nunca se intersectam (descontando o ponto C, o ponto de equilíbrio trivial) indicando a ausência de uma situação de equilíbrio relevante do ponto de vista económico. Temos assim um caso distinto dos anteriores já que neste o sistema não tem qualquer equilíbrio não-trivial.

Conclusão 1.9 *No caso de $\alpha = 1$, não existe equilíbrio de longo prazo não-trivial. Contrariamente aos outros exemplos, em que um equilíbrio deste tipo existia — e em que a questão que se colocava de seguida era se este era instável/estável ou se era múltiplo — no presente caso este tipo de equilíbrio pura e simplesmente não existe. Se o processo económico fosse iniciado com x_A , tenderia para infinito ao longo do tempo, não convergiria para nenhum ponto de equilíbrio no longo prazo.*

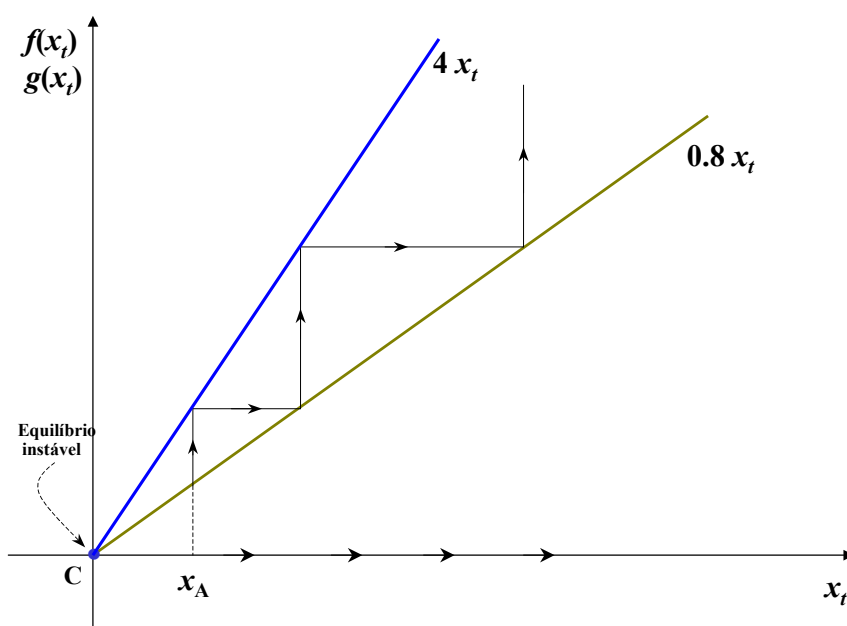


Figura 1.13: O EXEMPLO DE UM PROCESSO QUE NÃO TEM UM EQUILÍBRIO DE LONGO PRAZO QUE SEJA NÃO-TRIVIAL.

1.5 Sumário

1. Existe uma diferença significativa entre a análise estática e a análise dinâmica. Na primeira, as variáveis endógenas estão todas expressas relativamente ao mesmo período de tempo, enquanto que no segundo tipo de análise, as variáveis endógenas têm uma dinâmica própria devido ao facto de estarem expressas relativamente a períodos de tempo diferentes.
2. As equações utilizadas para expressar os processos dinâmicos são as "equações às diferenças" e as "equações diferenciais". Nas primeiras assume-se que o tempo decorre de forma discreta ($t = 1, 2, 3, \dots$), nas segundas o tempo decorre de forma contínua.
3. Muitos processos económicos só podem ser devidamente analisados através de uma análise dinâmica ou de longo prazo. Exemplos são a sustentabilidade da dívida pública, a sustentabilidade dos recursos naturais, o crescimento económico, etc..
4. Relativamente ao crescimento económico existe um conjunto de factores estilizados que deverão ser explicados pelos modelos teóricos, os quais são:

- (a) PIB per capita cresce a taxas constantes
 - (b) Capital per capita cresce a uma taxa constante
 - (c) A taxa de juro real permanece constante
 - (d) A taxa de salário real cresce a uma taxa constante
 - (e) A distribuição de rendimento por factores permanece constante
 - (f) Não existe convergência económica a nível mundial, apesar de poder existir dentro de certas zonas geográficas
 - (g) A pobreza e a riqueza estão grandemente concentrados a nível mundial, o que sugere a existência de externalidades positivas e negativas no processo de crescimento económico
5. Os processos dinâmicos têm três ingredientes fundamentais: uma condição inicial, o equilíbrio de longo prazo, e o processo de transição dinâmica. Estes dois últimos são fáceis de confundir, e levam normalmente a conclusões erradas sobre o processo dinâmico que se esteja a analisar.
6. No que diz respeito ao equilíbrio de longo prazo (ELP), existem três questões que são fundamentais para se perceber o comportamento de um processo dinâmico ao longo do tempo:
- (a) *Existência*: Será que um processo dinâmico tem um equilíbrio de longo prazo?
 - (b) *Estabilidade*: Se este ELP existir, é estável ou instável?
 - (c) *Multiplicidade*: Será o ELP único, ou existem equilíbrios múltiplos?
7. Para se determinar o equilíbrio de longo prazo deve-se aplicar a seguinte condição:
- (a) Processos discretos: $x_{t+1} = x_t = x^*$
 - (b) Processos contínuos: $\dot{x}_t = 0$
8. A alteração do valor de um único parâmetro pode alterar radicalmente o comportamento de um processo dinâmico no longo prazo. Pode tornar um equilíbrio estável em instável (ou vice versa), pode transformar um equilíbrio único num equilíbrio múltiplo, pode eliminar a existência de um equilíbrio (levando o processo a "explodir"), etc..